Algebra III - Abstraktna algebra, 01.02.2016.

1. Dana je množica $G = \{2x + 3y \mid x - 3y = 0,\ x, y \in \mathbb{Z}\}$.

(a.) Pokaži, da je $(G, +)$ grupa, kjer je $+$ običajno seštevanje celih števil.

(b.) Dana je podgrupa $H = \{2x + 3y \mid x - 3y = 0,\ y = 2k,\ x, k \in \mathbb{Z}\}$ grupe G. Napiši Cayley-evo tabelo za G/H.

Re.

(a.) $(2x_1 + 3y_1) + (2x_2 + 3y_2) = 2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2)$, $(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) = 0$, $0 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0$, $(2x + 3y) + (2(-x) + 3(-y)) = 0$.

(b.) $G = \{..., -45, -36, -27, -18, -9, 0, 9, 18, 27, 36, 45, ...\}$, $H = \{..., -36, -18, 0, 18, 36, ...\}$

$+$	H	$9+H$
H	H	$9+H$
$9+H$	$9+H$	H

$\square$

2. (a.) Dani sta grupi $(\mathbb{Z}_9, +)$ in $(\mathbb{Z}_3, +)$. Poišči vse homomorfizme iz grupe $\mathbb{Z}_9$ v grupo $\mathbb{Z}_3$.

(b) Naj bo $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ in $H = \mathbb{Z}_9$. Ali je $G \cong H$? Odgovor utemelji!

Re.

(a.) $\phi_1(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}_9$; $\qquad \phi_2(x) = 2x \bmod 3, \forall x \in \mathbb{Z}_9$.

(b.) $G \ncong H$, $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ $|(a, b)| \leq 3$.

$\square$

3. Množica $G = \{1, a, b, c, d, e, f, g\}$ tvori grupo glede na binarno operacijo $\circ$. Njena Cayley-eva tabela je dana na desni strani.

(a) Določi vse ciklične podgrupe grupe G. Za vsako ciklično podgrupo napiši vse njene generatorje.

(b) Za vsak $x \in G$ izračunaj $|x|$. Odgovor obrazloži!

(c.) Izračunaj center grupe G.

(d.) Izračunaj normalizator ter centralizator elementov a in g.

$\circ$	1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	a	b	c	d	e	f	g
a	a	e	c	g	b	f	1	d
b	b	c	f	1	e	g	d	a
c	c	g	1	a	f	d	b	e
d	d	b	e	f	a	c	g	1
e	e	f	g	d	c	1	a	b
f	f	1	d	b	g	a	e	c
g	g	d	a	e	1	b	c	f

Re.

(a.) $\langle 1 \rangle = \{1\}$, $\langle a \rangle = \{1, a, e, f\}$, $\langle e \rangle = \{1, e\}$, $\langle f \rangle = \{1, a, e, f\}$, $\langle b \rangle = \langle c \rangle = \langle d \rangle = \langle g \rangle = G$.

(b.) $|1| = 1$, $|e| = 2$, $|a| = |f| = 4$, $|b| = |c| = |d| = |g| = 8$.

(c.) $Z(G) = G$.

(d.) $N(a) = N(g) = G$.

$\square$

4. (a.) Naj bo G podgrupa grupe S_8, generirana z elementoma $(123)(45)$ in (78). Potem G kot grupa permutacij deluje na množici $X = \{1, 2, ..., 8\}$. Poišči orbito in stabilizator vseh elementov množice X.

(b) Naj bo G poljubna grupa, ki deluje na neki množici X. Predpostavimo, da je pri tem delovanju 6 orbit. Naj bo $H \leq G$ in naj bo $[G : H] = 3$. Koliko orbit ima lahko delovanje podgrupe H na množici X?

Re.

(a.) $G1 = G2 = G3 = \{1, 2, 3\}$, $G4 = G5 = \{4, 5\}$, $G6 = \{6\}$, $G7 = G8 = \{7, 8\}$;
$G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = G_5 = \langle(78)\rangle$, $G_6 = G$, $G_7 = G_8 = \langle(123)(45)\rangle$.

(b.) $|H| = \frac{1}{3}|Gx||G_x|$, $|H| \leq |Hx||G_x|$. Delovanje podgrupe H na množici X ima lahko od 6 do 18 orbit.

$\square$

Naloge so povzeti z `http://osebje.famnit.upr.si/~penjic/`